INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ETUDES ECONOMIQUES

ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ELEVES TITULAIRES STATISTICIENS ECONOMISTES

OPTION MATHEMATIQUES

JUIN 1995

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

4 pages

Il est demandé au candidat de souligner dans chacune de ses réponses le ou les points clés.

La clarté, la concision et la présentation seront des éléments importants d'appréciation.

Dans tout le problème, $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$ désignent, respectivement, le corps des nombres réels et le corps des nombres complexes. Les polynômes considérés seront dans $\mathbf{C}[X]$, l'espace des polynômes d'une variable complexe et à coefficients complexes. Si z est un élément de $\mathbf{C}$, on notera $\overline{z}$, le nombre conjugué de z et $\Im mz$, la partie imaginaire de z.

On sait et on admettra que tout polynôme de $\mathbf{C}[X]$ de degré $n \geq 1$, s'écrit sous la forme $c\prod_{k=1}^{n}(X - z_k)$, où c est un complexe non nul. Le nombre des indices k pour lesquels z_k a une même valeur ζ s'appelle l'ordre de multiplicité de la racine ζ du polynôme. Lorsqu'on parlera du nombre des racines du polynôme contenues dans un ensemble donné, sans autre précision, il s'agira des racines comptées avec leur ordre de multiplicité.

I. Soient $A(X) = a_0 + \ldots + a_n X^n$ et $B(X) = b_0 + \ldots + b_m X^m$, deux polynômes de degrés supérieurs ou égaux à 1 et tels que a_n et b_m sont non nuls.

1) Montrer que, pour que A et B admettent au moins une racine commune, il faut et il suffit qu'il existe deux polynômes non nuls C et D de degrés respectifs inférieurs ou égaux à $m-1$ et $n-1$ tels que l'on ait $AC = BD$.

2) Si $v = (v_1, \ldots, v_{m+n-1}, v_{m+n})$ est un vecteur de $\mathbb{C}^{m+n}$, on notera $P(v)$ le vecteur $(v_{m+n}, v_1, \ldots, v_{m+n-1})$ obtenu par permutation circulaire des coordonnées de v et l'on notera $P^k(v)$, l'image itérée d'ordre k de v par P. On notera a le vecteur de $\mathbb{C}^{m+n}$ de coordonnées $(a_n, \ldots, a_0, 0, \ldots, 0)$ et b le vecteur de $\mathbb{C}^{m+n}$ de coordonnées $(b_m, \ldots, b_0, 0, \ldots, 0)$. Soit alors $M(A,B)$ la matrice carrée de dimension $(m+n)$, définie par la donnée de ses vecteurs ligne: a, $P(a)$, ..., $P^{m-1}(a)$, b, $P(b)$, ..., $P^{n-1}(b)$. Montrer que, pour que A et B admettent une racine commune, il faut et il suffit que le déterminant de $M(A,B)$ soit égal à zéro.

II. Soit A le polynôme de la partie I, on note A^* le polynôme défini par

$$A^*(X) = \overline{a}_0 + \ldots + \overline{a}_n X^n.$$

On pose alors,

$$K(A; X, Y) = \frac{A(X)A^*(Y) - A(Y)A^*(X)}{X - Y}.$$

1) Montrer que $K(A; X, Y)$ peut s'identifier à un polynôme symétrique de $\mathbb{C}[X, Y]$ et qu'il s'écrit sous la forme $\sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{h,k} X^h Y^k$.

2) Pour $(u_0, \ldots, u_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, on pose $H(A; u_0, \ldots, u_{n-1}) = \frac{1}{i} \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{h,k} u_h \overline{u}_k$. Montrer que $H(A; .)$ ainsi définie est une forme hermitienne.

3) Montrer que si C et D sont deux polynômes tels que $C(X) = c_0 + \ldots + c_r X^r$ et $D(X) = d_0 + \ldots + d_s X^s$, avec $r + s = n$, alors

$$H(CD; u_0, \ldots, u_{n-1}) = H(C; v_0, \ldots, v_{r-1}) + H(D; w_0, \ldots, w_{s-1})$$

où, pour $h = 0, \ldots, r-1$ et $k = 0, \ldots, s-1$, $v_h = V_h(u_0, \ldots, u_{n-1})$, $w_k = W_k(u_0, \ldots, u_{n-1})$, les V_h et les W_k étant des formes linéaires en $(u_0, \ldots, u_{n-1})$.

4) Montrer que les formes linéaires V_h et W_k, pour $h = 0, \ldots, r-1$ et $k = 0, \ldots, s-1$, sont linéairement indépendantes si et seulement si C^* et D n'ont aucune racine commune.

5) En déduire que si $A = CD$ n'a aucune racine réelle et aucun couple de racines conjuguées alors les formes linéaires du 4) sont linéairement indépendantes.

6) Montrer que si $\varphi(X) = X - z_0$ alors $H(\varphi; u_0) = \frac{1}{i}(z_0 - \overline{z}_0)u_0\overline{u}_0$.

7) En déduire que si $A(X) = a_n \prod_{k=1}^{n}(X - z_k)$, alors

$$H(A; u_0, \ldots, u_{n-1}) = \frac{|a_n|^2}{i} \sum_{k=1}^{n} (z_k - \overline{z}_k) F_k(u_0, \ldots, u_{n-1}) \overline{F_k(u_0, \ldots, u_{n-1})}$$

où les F_k, pour $k = 1, \ldots, n$, sont des formes linéaires en $(u_0, \ldots, u_{n-1})$.

8) Soit G le p.g.c.d. normalisé (i.e. de coefficient dominant égal à 1) de A et A^* et posons $A = GD$. Montrer que $H(A; u_0, \ldots, u_{n-1}) = H(D; \tilde{w}_0, \ldots, \tilde{w}_{n-m-1})$, où m désigne le degré de G et où, pour $k = 0, \ldots, n-m-1$, $\tilde{w}_k = \tilde{W}_k(u_0, \ldots, u_{n-1})$, les $\tilde{W}_k$ étant des formes linéaires en $(u_0, \ldots, u_{n-1})$.

9) Montrer que le rang de la forme hermitienne $H(A; .)$ est égal à $n-m$ et sa signature (p, q) telle que p est le nombre de racines de D contenues dans le demi-plan d'équation $\Im m(z) > 0$ et q le nombre de racines de D contenues dans le demi-plan d'équation $\Im m(z) < 0$.

10) En déduire que $H(A; .)$ est définie positive si et seulement si toutes les racines de A sont dans le demi-plan d'équation $\Im m(z) > 0$.

III. Dans cette partie, A est un polynôme à coefficients réels de la forme

$$A(X) = a_0 + \ldots + a_n X^n.$$

Pour t réel fixé, on associe au polynôme A, le polynôme $A_t(X) = (X - t)A'(X)$, où A' désigne le polynôme dérivé de A. On définit alors

$$L_t(A; X, Y) = \frac{A(X)A_t(Y) - A(Y)A_t(X)}{X - Y}.$$

1) Montrer que $L_t(A; X, Y)$ peut s'identifier à un polynôme symétrique de $\mathbf{R}[X, Y]$ et qu'il s'écrit sous la forme $\sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{h,k} X^h Y^k$. On associe alors à tout polynôme à

coefficients réels A, la forme quadratique sur $\mathbf{R}^n$ définie, pour $(u_0, \ldots, u_{n-1}) \in \mathbf{R}^n$, par $Q_t(A; u_0, \ldots, u_{n-1}) = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{h,k} u_h u_k$.

2) Montrer que si C et D sont deux polynômes à coefficients réels tels que
$C(X) = c_0 + \ldots + c_r X^r$ et
$D(X) = d_0 + \ldots + d_s X^s$, avec $r + s = n$, alors

$$Q_t(CD; u_0, \ldots, u_{n-1}) = Q_t(C; \phi_0, \ldots, \phi_{r-1}) + Q_t(D; \psi_0, \ldots, \psi_{s-1})$$

où, pour $h = 0, \ldots, r-1$ et $k = 0, \ldots, s-1$, $\phi_h = \Phi_h(u_0, \ldots, u_{n-1})$, $\psi_k = \Psi_k(u_0, \ldots, u_{n-1})$, les Φ_h et les Ψ_k étant des formes linéaires en $(u_0, \ldots, u_{n-1})$.

3) Montrer que les formes linéaires Φ_h et Ψ_k, pour $h = 0, \ldots, r-1$ et $k = 0, \ldots, s-1$, sont linéairement indépendantes si et seulement si C et D n'ont aucune racine commune.

4) Pour $x_0 \in \mathbf{R}$, on pose $\varphi(X) = X - x_0$, montrer que l'on a alors $L_t(\varphi; X, Y) = x_0 - t$ et $Q_t(\varphi; u_0) = (x_0 - t)u_0^2$.

5) Pour x_0 et x_1 réels, on pose $P(X) = (X - x_0)^2 + x_1$, déterminer la signature de la forme quadratique $Q_t(P; u_0, u_1)$.

6) Montrer que si A est un polynôme réel sans racines multiples, alors A s'écrit sous la forme $A(X) = \prod_{i=1}^{p+q}(X - x_i)B(X)$, où les x_i sont réels et où B est un polynôme irréductible sur $\mathbf{R}$ de degré $2m$ (avec $p + q + 2m = n$). Montrer de plus que l'on a, en posant $u = (u_0, \ldots, u_{n-1})$,

$$Q_t(A; u) = \sum_{i=1}^{p+q}(x_i - t)F_i^2(u) + Q_t(B; F_{p+q+1}(u), \ldots, F_n(u)),$$

où la famille $(F_i)_{i=1,\ldots,n}$ constitue une famille libre de formes linéaires sur $\mathbf{R}^n$.

7) Montrer que la signature de la forme quadratique $Q_t(B; .)$ est (m, m).

8) En déduire que si A est un polynôme à coefficients réels n'ayant pas de racines multiples et si t n'est pas une racine de A alors la signature de $Q_t(A; .)$ est $(p + m, q + m)$, où p est le nombre de racines réelles de A strictement supérieures à t, q le nombre de racines réelles de A strictement inférieures à t et $2m$ le nombre de racines imaginaires de A.